Abenteuer *Informatik*

Informatik begreifen

1 Das Waag-nis

798

Können Sie mit der angegebenen Erklärung jede Kombination aus roten Gewichten mit einer Kombination aus blauen Gewichten ausgleichen?

Waagen Sie es!

Stellen Sie ein beliebiges Gewicht mit den blauen Bausteinen zusammen, z. B. 10 + 10 + 1 + 1 = 22 Bringen Sie dann die Waage ins Gleichgewicht, indem Sie die andere Waagschale mit roten Bausteinen füllen.

Was mache ich da eigentlich? Wofür stehen blau und rot? Und was bedeuteten die Kennzeichnungen 10^0, 10^1, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 usw.?

Die blauen Bausteine stellen unser Dezimalsystem dar. Die Wertigkeit lässt sich an der Anzahl der Ringe ablesen, 10^0 entspricht unserer 1, 10^1 entspricht unserer 10. Die roten Bausteine stellen das Binärsystem dar. Die Wertigkeit lässt sich ebenfalls an den Ringen ablesen und so entspricht z.B. 2^0 unserer 1 und 2^1 unserer 2, 2^2 entspricht unserer 4 usw. Weitere Erklärungen finden Sie auf den folgenden Seiten. Mit dem „Waagnis“ können Sie experimentell nachvollziehen, dass sich jede dezimale Zahl auch binär darstellen lässt.

Abenteuer Informatik
Informatik begreifen

2 Zahlensysteme

0	0	103	1100111
1	1	104	1101000
2	10	105	1101001
3	11	106	1101010
4	100	107	1101011
5	101	108	1101100
6	110	109	1101101
7	111	110	1101110
8	1000	111	1101111
9	1001	112	1110000
10	1010	113	1110001
11	1011	114	1110010
12	1100	115	1110011
13	1101	116	1110100
14	1110	117	1110101
15	1111	118	1110110
16	10000	119	1110111
17	10001	120	1111000
18	10010	121	1111001
19	10011	122	1111010
20	10100	123	1111011
21	10101	124	1111100
22	10110	125	1111101
23	10111	126	1111110
24	11000	127	1111111
25	11001	128	10000000
26	11010	129	10000001
27	11011	130	10000010
28	11100	131	10000011
29	11101	132	10000100
30	11110	133	10000101
31	11111	134	10000110
32	100000	135	10000111
33	100001	136	10001000
34	100010	137	10001001
35	100011	138	10001010
36	100100	139	10001011
37	100101	140	10001100
38	100110	141	10001101
39	100111	142	10001110
40	101000	143	10001111
41	101001	144	10010000
42	101010	145	10010001
43	101011	146	10010010
44	101100	147	10010011
45	101101	148	10010100
46	101110	149	10010101
47	101111	150	10010110
48	110000	151	10010111
49	110001	152	10011000
50	110010	153	10011001
51	110011	154	10011010
52	110100	155	10011011
53	110101	156	10011100
54	110110	157	10011101
55	110111	158	10011110
56	111000	159	10011111
57	111001	160	10100000
58	111010	161	10100001
59	111011	162	10100010
60	111100	163	10100011
61	111101	164	10100100
62	111110	165	10100101
63	111111	166	10100110
64	1000000	167	10100111
65	1000001	168	10101000
66	1000010	169	10101001
67	1000011	170	10101010
68	1000100	171	10101011
69	1000101	172	10101100
70	1000110	173	10101101
71	1000111	174	10101110
72	1001000	175	10101111
73	1001001	176	10110000
74	1001010	177	10110001
75	1001011	178	10110010
76	1001100	179	10110011
77	1001101	180	10110100
78	1001110	181	10110101
79	1001111	182	10110110
80	1010000	183	10110111
81	1010001	184	10111000
82	1010010	185	10111001
83	1010011	186	10111010
84	1010100	187	10111011
85	1010101	188	10111100
86	1010110	189	10111101
87	1010111	190	10111110
88	1011000	191	10111111
89	1011001	192	11000000
90	1011010	193	11000001
91	1011011	194	11000010
92	1011100	195	11000011
93	1011101	196	11000100
94	1011110	197	11000101
95	1011111	198	11000110
96	1100000	199	11000111
97	1100001	200	11001000
98	1100010	201	11001001
99	1100011	202	11001010
100	1100100	203	11001011
101	1100101	204	11001100
102	1100110	205	11001101

Es gibt also verschiedene Zahlensysteme: Neben dem Dezimalsystem, das wir im Alltag benutzen, auch noch das Binärsystem. Habe ich das richtig verstanden?

Ja, stimmt! Unser Dezimalsystem ist nur eines der verschiedenen Zahlensysteme, das Binärsystem ein anderes, aber es gibt noch viele mehr.

Und was macht genau das Dezimalsystem, also unser Zahlensystem, aus?

Dezimalzahlen bestehen aus 10 verschiedenen Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Das entspricht der Anzahl unserer Finger und ist wahrscheinlich auch deshalb so entstanden. Wir zählen von 0 bis 9. Für die nächste Zahl nach der 9, müssen wir eine neue Spalte eröffnen, um dann wieder von vorne anfangen zu können - mit der 0. Deshalb schreiben wir vor die 0 eine 1 und erhalten eine 10. Dann können wir weiter zählen: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Nach der 19 sind dann wieder die zur Verfügung stehenden Ziffern erschöpft und wir müssen eine Stelle weiter links hochzählen, also von 19 auf 20.

Das bedeutet 2 mal 10 plus 0 mal 1. Jede Stelle einer Zahl hat also einen anderen Wert:

2 3 5 7

Einerstelle	1 x 7 =	7
Zehnerstelle	10 x 5 =	50
Hunderterstelle	100 x 3 =	300
Tausenderstelle	1000 x 2 =	2000
		2357

Da unser Zahlensystem aus 10 Ziffern besteht, nennen wir es Dezimalsystem: (lat.) dezi = zehn.

Das Binärsystem dagegen hat nur zwei Ziffern, die 0 und die 1. Es zählt also auch nur mit diesen beiden Ziffern, d. h. es muss viel öfter eine neue Spalte eröffnet werden. Wenn wir binär zählen beginnen wir - wie im Dezimalsystem - mit der 0. Darauf folgt die 1. Da jetzt schon alle Ziffern aufgebraucht sind, eröffnen wir eine neue Spalte und erhalten 10, was umgerechnet unserer 2 entspricht. Darauf folgen dann 11 und 100 (3 und 4 im Dezimalsystem) und so weiter. Damit wir die Zahlen nicht verwechseln, schreiben wir eine kleine 2 an die binären Zahlen und eine kleine 10 an unsere Zahlen. Die 11_2 steht dann für unsere 3_{10} und so weiter.

Andere Zahlensysteme

Und was gibt es sonst noch für Zahlensysteme?

Wir könnten statt unserem Zehnersystem auch nur mit einem Fünfersystem rechnen, also quasi beim Zählen nur eine Hand benutzen. Die Ziffern wären dann: 0, 1, 2, 3 und 4. Für die nächste Zahl eröffnen wir wieder eine neue Spalte wie oben: 10. Da diese „1 0“ genauso aussieht, wie unsere Zehn, schreiben wir eine kleine 5 dahinter, wie vorher auch schon beim Binärsystem:

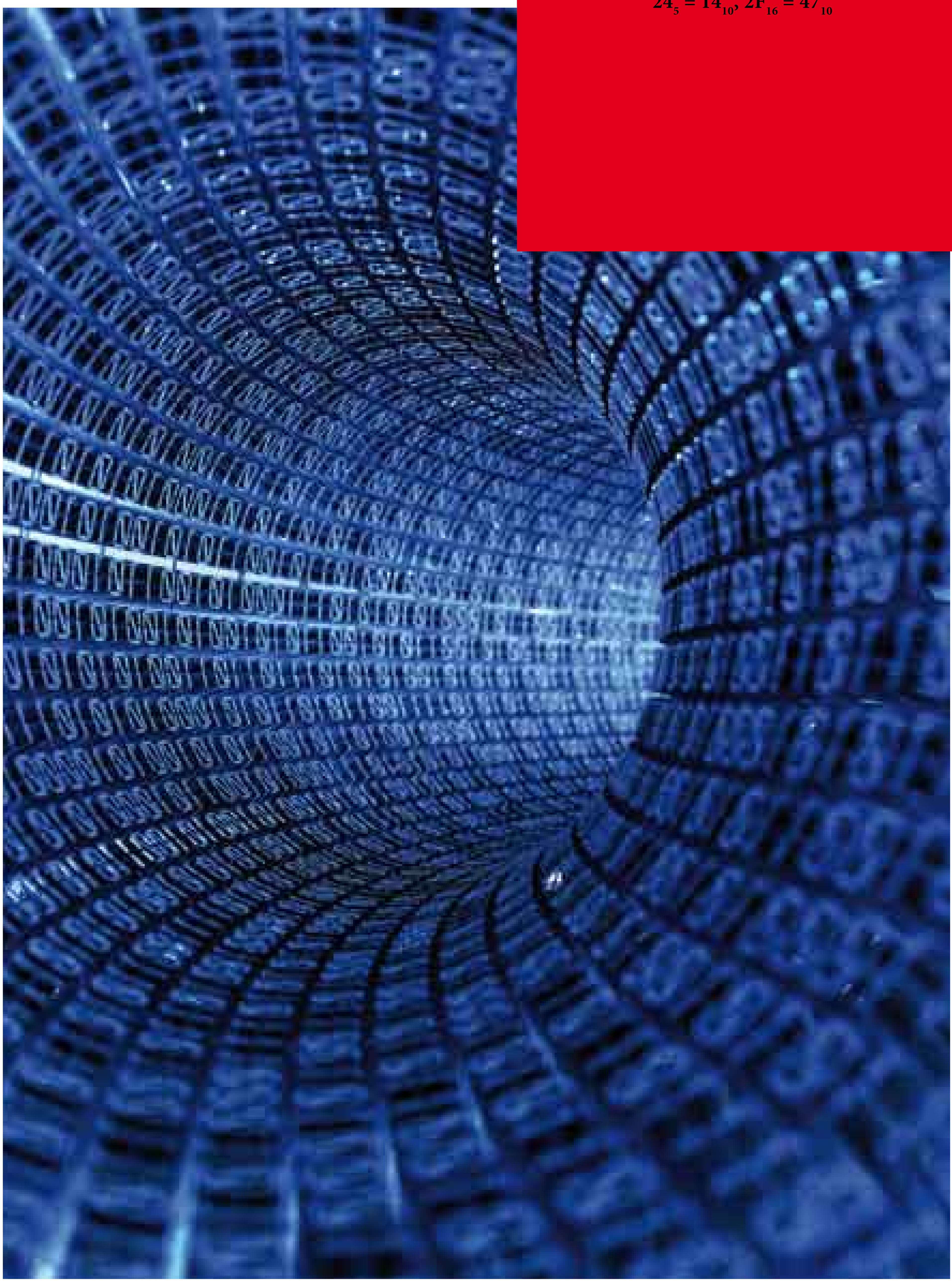
$1_{10} = 1_5$ $4_{10} = 4_5$ $7_{10} = 12_5$
$2_{10} = 2_5$ $5_{10} = 10_5$ $8_{10} = 13_5$
$3_{10} = 3_5$ $6_{10} = 11_5$ $9_{10} = 14_5$
$10_{10} = 20_5$

Bei dem in der Informatik gängigen hexadezimalen (hexa = sechs, dezi = zehn) Zahlensystem, das mehr als 10 Ziffern besitzt, nehmen wir uns Buchstaben zur Hilfe, um die fehlenden Ziffern darstellen zu können. Die 16 Ziffern lauten dann: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, wobei F unserer dezimalen 15 entspricht.

Versuchen Sie mal folgende Aufgaben zu knobeln:

- Können Sie die dezimale Zahl 14_{10} hexadezimal darstellen?
- Wie würde die Zahl 15_{10} im Fünfersystem aussehen?
- Welche Dezimalzahlen verbergen sich hinter 24_5 und $2F_{16}$?

Lösungen:
$14_{10} = E_{16}$
$15_{10} = 30_5$
$24_5 = 14_{10}$, $2F_{16} = 47_{10}$



Abenteuer *Informatik*

Informatik begreifen

3 dezimal und binär

Einmal dezimal nach binär und zurück bitte

Wie rechne ich denn eine dezimale in eine binäre Zahl um?

Das Umrechnen von einer Dezimal- in eine Binärzahl erreichen wir, indem wir die Dezimalzahl durch 2 teilen so lange bis das Ergebnis dieser Divison 0 ist. Dabei merken wir uns die jeweiligen Reste und schon haben wir die gesuchte Binärzahl.

Beispiel mit 163:

163 : 2 = 81	Rest 1 -> 2^0	(Stelle ganz rechts)
81 : 2 = 40	Rest 1 -> 2^1	
40 : 2 = 20	Rest 0 -> 2^2	
20 : 2 = 10	Rest 0 -> 2^3	
10 : 2 = 5	Rest 0 -> 2^4	
5 : 2 = 2	Rest 1 -> 2^5	
2 : 2 = 1	Rest 0 -> 2^6	
1 : 2 = 0	Rest 1 -> 2^7	(Stelle ganz links)

Ergebnis ist also 10100011

Und wie geht es im umgekehrten Fall?

Um eine Zahl vom Binär- ins Dezimalsystem umzurechnen, müssen wir uns die Zweierpotenzen ins Gedächtnis rufen. An allen Stellen, an denen eine 1 steht, multiplizieren wir diese mit der jeweiligen Zweierpotenz. Dies ergibt dann in der Summe unsere Dezimalzahl. Im Prinzip multiplizieren wir also einfach jede Stelle mit ihrem Wert im binären Stellensystem. Das haben wir auf Tafel 2 schon einmal für das Dezimalsystem durchgemacht...

Für 10100011 ist das also

1 0 1 0 0 0 1 1

1 x 2^0 =	1
1 x 2^1 =	2
0 x 2^2 =	0
0 x 2^3 =	0
0 x 2^4 =	0
1 x 2^5 =	32
0 x 2^6 =	0
1 x 2^7 =	128
	163

Denken Sie nochmal zurück an die Wägung von Tafel 1. Im Prinzip haben Sie nichts anderes gemacht, als bei der Umrechnung zwischen Binärzahlen und Dezimalzahlen. Bei den roten Gewichten hat 2^0 einen Ring, 2^1 hat 2 Ringe, 2^2 hat 4 Ringe usw. Jedes rote Gewicht steht also für eine Ziffer im Binärsystem. Liegt das Gewicht auf der Waage, ist die Ziffer gesetzt.
Zum Ausgleich verwenden wir blaue Gewichte, die Dezimalziffern entsprechen. Diese müssen wir allerdings zusammensetzen aus Einsern und Zehnern. Genau wie die Umrechnungsvorschrift hier ein eindeutiges Ergebnis hat, kann jede Kombination aus roten Gewichten von genau einer Kombination blauer Gewichte ausgeglichen werden!

Mit dem Binärsystem können Sie rechnen...

Im Binärsystem können Sie übrigens genauso schriftlich addieren, wie im Dezimalsystem. Allerdings bekommen Sie viel schneller einen Übertrag:

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 10 (bzw. 0 mit Übertrag 1)

Erinnern Sie sich noch an die schriftliche Addition?

```
  789
+ 164
   1 1
------
= 953
```

Beim schriftlichen Addieren zweier (Dezimal-)Zahlen betrachten wir die Ziffern einzeln von hinten nach vorne. Es kommt ein Ergebnis und - eventuell - ein Übertrag heraus, der dann ab der zweiten Stelle auch bei der Addition berücksichtigt werden muss. Genau so funktioniert das schriftliche Addieren im Binärsystem. Auch hier fallen Überträge an.

```
   101
 + 011
    1 1
-------
= 1000
```

Versuchen Sie es selbst:

Wandeln Sie die Zahl 85_{10} um!
Wandeln Sie die Zahl 101011_2 um!
Addieren Sie die Zahlen 1001_2 und 111_2 binär!

Lösungen:

$85_{10} = 1010101_2$

$101011_2 = 43_{10}$

```
   1001
+   111
-------
= 10000
```

2^0 = 1	2^{24} = 16.777.216	2^{48} = 281.474.976.710.656
2^1 = 2	2^{25} = 33.554.432	2^{49} = 562.949.953.421.312
2^2 = 4	2^{26} = 67.108.864	2^{50} = 1.125.899.906.842.624
2^3 = 8	2^{27} = 134.217.728	2^{51} = 2.251.799.813.685.248
2^4 = 16	2^{28} = 268.435.456	2^{52} = 4.503.599.627.370.496
2^5 = 32	2^{29} = 536.870.912	2^{53} = 9.007.199.254.740.992
2^6 = 64	2^{30} = 1.073.741.824	2^{54} = 18.014.398.509.481.984
2^7 = 128	2^{31} = 2.147.483.648	2^{55} = 36.028.797.018.963.968
2^8 = 256	2^{32} = 4.294.967.296	2^{56} = 72.057.594.037.927.936
2^9 = 512	2^{33} = 8.589.934.592	2^{57} = 144.115.188.075.855.872
2^{10} = 1.024	2^{34} = 17.179.869.184	2^{58} = 288.230.376.151.711.744
2^{11} = 2.048	2^{35} = 34.359.738.368	2^{59} = 576.460.752.303.423.488
2^{12} = 4.096	2^{36} = 68.719.476.736	2^{60} = 1.152.921.504.606.846.976
2^{13} = 8.192	2^{37} = 137.438.953.472	2^{61} = 2.305.843.009.213.693.952
2^{14} = 16.384	2^{38} = 274.877.906.944	2^{62} = 4.611.686.018.427.387.904
2^{15} = 32.768	2^{39} = 549.755.813.888	2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808
2^{16} = 65.536	2^{40} = 1.099.511.627.776	2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616
2^{17} = 131.072	2^{41} = 2.199.023.255.552	2^{65} = 36.893.488.147.419.103.232
2^{18} = 262.144	2^{42} = 4.398.046.511.104	2^{66} = 73.786.976.294.838.206.464
2^{19} = 524.288	2^{43} = 8.796.093.022.208	2^{67} = 147.573.952.589.676.412.928
2^{20} = 1.048.576	2^{44} = 17.592.186.044.416	2^{68} = 295.147.905.179.352.825.856
2^{21} = 2.097.152	2^{45} = 35.184.372.088.832	2^{69} = 590.295.810.358.705.651.712
2^{22} = 4.194.304	2^{46} = 70.368.744.177.664	2^{70} = 1.180.591.620.717.411.303.424
2^{23} = 8.388.608	2^{47} = 140.737.488.355.328	2^{71} = 2.361.183.241.434.822.606.848

4 Zahlenmagie

Kann man mit binären Zahlen auch zaubern? Oder wofür steht der Titel dieser Tafel?

Ja, diesen Trick können Sie gleich hier vorführen und auch mit nach Hause nehmen. Sie benötigen dafür die sechs abgebildeten Karten. Ein Freiwilliger soll sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 63 denken. Nun sagt er Ihnen die Farben der Karten, auf denen seine Zahl gedruckt ist. Sie können ohne weiteres Nachdenken die Zahl nennen.

Falls Sie den Trick vorführen möchten, aber nicht wissen, wie er funktioniert, schauen Sie mal heimlich unter die rote Klappe...

Abenteuer Informatik
Informatik begreifen

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63			

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59
62	63			

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	61
62	63			

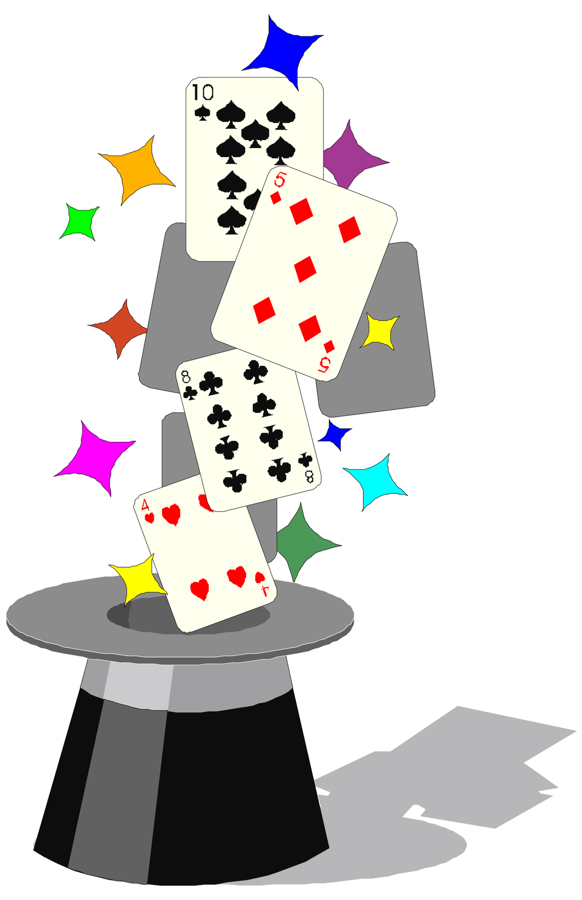
8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	61
62	63			

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	61
62	63			

Und - können Sie sich denken, was hinter der Magie steckt?

Ich glaube schon! Ich gehe mal stark vom Zauber der Binärzahlen aus. Vielleicht können unsere Besucher aber auch selbst dahinterkommen! Schreiben Sie die Zahlen auf den Karten binär statt dezimal auf! Die „Übersetzung“ können Sie auf Tafel 3 sehen. Fällt Ihnen jetzt auf, was die Zahlen auf einer Karte gemeinsam haben?



Addieren Sie einfach die Zahlen in der linken oberen Ecke aller genannten Karten.

Die Summe ist die gesuchte Zahl.